

Opción A

Ejercicio 1A

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2+bx+1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2-5x+2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$, es derivable.

Determina los valores de **a** y **b**

Solución

Para ser derivable debe de ser, primeramente, función continua, después la derivada debe de ser igual en el punto de discontinuidad.

Continuidad

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1^2 + b \cdot 1 + 1 = -1 + b + 1 = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2a = 3a - 5 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow b = 3a - 5$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + b & \text{si } x \leq 1 \\ 2ax - 5 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -2 \cdot 1 + b = -2 + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2a \cdot 1 - 5 = 2a - 5 \end{cases} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \Rightarrow b - 2 = 2a - 5$$

$$\begin{cases} 3a - b = 5 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 5 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 - b = 3 \Rightarrow 4 - b = 3 \Rightarrow b = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 - 5x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2A

a) [1'25 puntos] Calcula $\int x \sin x \, dx$

b) [1'25 puntos] Sean las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x - 1$. Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas

Solución

a)

$$\int x \sin x \, dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow du = dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int \sin x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{cases}$$

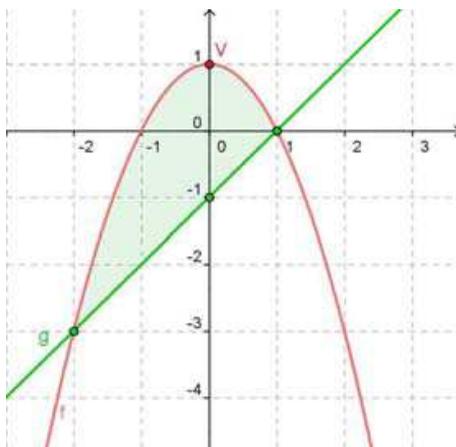
b) **De Conchi Mérida (IES Inca Garcilaso)**

Se dibujan previamente las funciones y el recinto limitado por ellas.

$f(x) = -x^2 + 1$ es una parábola exactamente igual que $-x^2$ pero desplazada una unidad hacia arriba en ordenadas OY. ($-x^2$ es exactamente igual que x^2 pero simétrica respecto al eje de abscisas OX), por tanto su vértice está en (0,1), ramas de la parábola hacia abajo y corta al eje OX en (-1,0) y (1,0).

$g(x) = x - 1$ es una recta y con dos puntos es suficiente para dibujarla.

Un esbozo de sus gráficas es



Igualamos $f(x)$ a $g(x)$ para ver los puntos donde cortan

$-x^2 + 1 = x - 1$, de donde $x^2 + x - 2 = 0$. Resolviendo la ecuación nos resulta $x = 1$ y $x = -2$.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^1 [(-x_2 + 1) - (x - 1)] dx = \int_{-2}^1 (-x_2 - x + 2) dx = [-x_3/3 - x_2/2 + 2x]_{-2}^1 \\ &= (-1/3 - 1/2 + 2) - (8/3 - 2 - 4) = 9/2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Ejercicio 3A

[1'25 puntos] a) Resuelve el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x+z=2 \\ -x+y+2z=0 \\ -x+2y+5z=2 \end{cases}$$

b) [1'25 puntos] Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del

apartado a)
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+3z=1 \\ x+2y+\lambda z=-3 \end{cases}$$

Solución

(a)

$$\begin{cases} x + z=2 \\ -x+y+2z=0 \\ -x+2y+5z=2 \end{cases} \begin{matrix} E_2+E_1 \\ E_3+E_1 \end{matrix} \approx \begin{cases} x + z=2 \\ y + 3z=2 \\ 2y+6z=4 \end{cases} \begin{matrix} E_3+E_2(-2) \end{matrix} \approx \begin{cases} x + z=2 \\ y + 3z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como tengo un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas es un sistema compatible indeterminado.

Tomo $z = "m"$ n° real y me queda $x = 2 - m$ e $y = 2 - 3m$.

Solución $(x,y,z) = (2 - m, 2 - 3m, m)$ con "m" n° real.

(b)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & -3 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada del sistema
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+3z=1 \\ x+2y+\lambda z=-3 \end{cases}$$

Para que en principio este sistema tenga alguna solución común con el del sistema del apartado (a), tiene que ser compatible e indeterminado, es decir $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$.

En A para que tenga rango 2 su determinante tiene que ser cero, es decir $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

Si $|A| = 0$, tenemos $2\lambda - 6 = 0$, de donde $\lambda = 3$.

Veamos si $\text{rango } A^*$ es 2.

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & -3 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1+F_2 \\ F_3+F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (-1)(-1)(-4-6) \neq 0$, tenemos que el

$\text{rango } A^* = 3$, sea cual sea el valor de λ .

Si $\lambda = 3$, el sistema es incompatible al tener distintos rangos A y A^* . Si $\lambda \neq 3$, el sistema tiene solución única, que por Cramer sería:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda - 6} = (-5)/(\lambda - 3); \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda - 6} = (\lambda + 7)/(\lambda - 3); \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{2\lambda - 6} = (-5)/(\lambda - 3)$$

Para que esta solución coincidiese con la del apartado (a) tendría que verificarse a la vez:

$$(-5)/(\lambda - 3) = 2 - m; \quad (\lambda + 7)/(\lambda - 3) = 2 - 3m \quad \text{y} \quad (-5)/(\lambda - 3) = m.$$

De $(-5)/(\lambda - 3) = m$, tenemos $\lambda = 3 - 5/m = (3m - 5)/m$

De $(-5)/(\lambda - 3) = 2 - m$, tenemos $-5 = 2\lambda - 6 - \lambda m + 3m = \lambda(2 - m) - 6 + 3m$, luego $\lambda = (1 - 3m)/(2 - m)$

Si las λ fuesen iguales tendríamos $(1 - 3m)/(2 - m) = (3m - 5)/m$,

$m - 3m^2 = (2 - m)(3m - 5) = 6m - 10 - 3m^2 + 5m \rightarrow m = 6m - 10 + 5m \rightarrow m = 1$, con lo cual tenemos que $\lambda = 3 - 5/(1) = -2$, y la solución común es $(2 - (1), 2 - 3(1), (1)) = (1, -1, 1)$.

Ejercicio 4A

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, 1, -1)$, es paralela al plano de ecuación $x - y + z = 1$ y corta al eje Z

Solución

El vector formado por el punto **P** y el punto del eje **OZ**, que es un vector de la recta r , es perpendicular al vector director del plano π , siendo su producto escalar nulo

La ecuación vectorial del eje **OZ** es $(x,y,z) = (0,0,\lambda)$ con λ cualquier número real y un vector director genérico del eje **OZ** sería $\mathbf{z} = \mathbf{OZ} = (0,0,\lambda)$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = \overrightarrow{AZ} = (1, 1, -1) - (0, 0, \lambda) = (1, 1, -1-\lambda) \\ \vec{v}_\pi = (1, -1, 1) \end{cases}, \text{ es decir } \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi, \text{ luego } \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$$

$$(1, 1, -1-\lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0, \text{ de donde } 1 - 1 - 1 - \lambda = 0, \text{ por tanto } -1 - \lambda = 0, \text{ luego } \lambda = -1.$$

$$\vec{v}_r = [1, 1, -1 - (-1)] = (1, 1, 0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot \mu = 1 + \mu \\ y = 1 + 1 \cdot \mu = 1 + \mu \\ z = -1 + 0 \cdot \mu = -1 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1B

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene extremos relativos en **(0, 0)** y **(2, 2)**. Calcula **a, b, c** y **d**.

Solución

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0 \\ f(2) = 2 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 2 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 2 \\ f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ -6a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

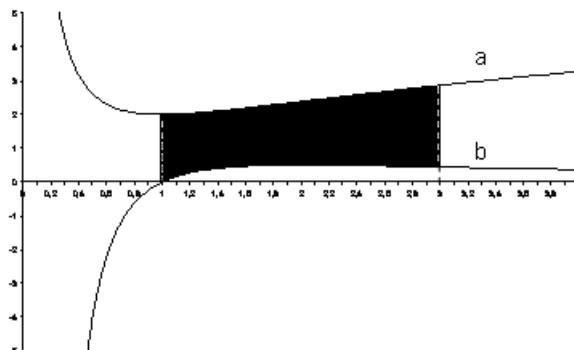
Ejercicio 2B

Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2}{x} + 2\ln x$ y a la de su derivada $f': (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (\ln denota logaritmo neperiano)

a) [0'5 puntos] Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de **f** y cuál la de **f'**

b) [2 puntos] Calcula el área de la región sombreada

Solución



a)

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2x-2}{x^2} = \frac{2 \cdot (x-1)}{x^2}$$

Estudiemos las funciones por los puntos de corte con el eje OX $\Rightarrow y=0$

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \ln x = 0 \Rightarrow \frac{2+x \ln x}{x} = 0 \Rightarrow 2+x \ln x = 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \\ \text{Extremo relativo en } \Rightarrow x-1=0 \\ \frac{2 \cdot (x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Función } \Rightarrow \text{gráfica a} \\ \text{Derivada } \Rightarrow \text{gráfica b} \end{cases}$$

b)

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x = x \cdot (\ln x - 1) + K$$

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

$$A = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} + 2 \ln x \right) dx - \int_1^3 \frac{2 \cdot (x-1)}{x^2} dx = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} + 2 \ln x \right) dx - \int_1^3 \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{2}{x} + \ln x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$A = \int_1^3 \left(2 \ln x + \frac{2}{x^2} \right) dx = 2 \int_1^3 \ln x \, dx + 2 \int_1^3 x^{-2} dx = 2 \cdot [x \cdot (\ln x - 1)]_1^3 + \frac{2}{-2+1} \cdot [x^{-1}]_1^3$$

$$A = 2 \cdot [3 \cdot (\ln 3 - 1) - 2 \cdot (\ln 1 - 1)] - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 2 \cdot [3 \ln 3 - 3 - (0 - 1)] - \left(-\frac{4}{3} \right) = 6 \ln 3 - 6 - 2 \cdot (-1) + \frac{4}{3}$$

$$A = 6 \ln 3 - 6 + 2 + \frac{4}{3} = 6 \ln 3 - 4 + \frac{4}{3} = 6 \ln 3 - \frac{8}{3} = \frac{18 \ln 3 - 8}{3} \quad u^2$$

Ejercicio 3B

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula, si existe, A^{-1}

b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema $AX = 3X$ e interpreta geoméricamente el conjunto de sus soluciones

Solución

a)

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 4 - 1 + 8 + 8 = 27 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{6}{27} & -\frac{6}{27} & \frac{3}{27} \\ -\frac{6}{27} & \frac{3}{27} & -\frac{6}{27} \\ \frac{3}{27} & -\frac{6}{27} & -\frac{6}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x-2y+z \\ -2x+y-2z \\ x-2y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y+z=3x \\ -2x+y-2z=3y \\ x-2y-2z=3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x-2y+z=0 \\ -2x-2y-2z=0 \\ x-2y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-2y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Son tres planos} \Rightarrow \text{Ecuación homogénea}$$

Como $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -25 + 2 + 2 + 1 + 10 + 10 = 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado y el rango es 2.

Como el sistema es compatible e indeterminado al tener rango es 2, para resolver el sistema sólo necesito dos ecuaciones, pues la 3ª ecuación es combinación de las anteriores, por tanto los tres planos se cortan en una recta de ecuación (en forma implícita)

$$x + y + z = 0$$

$$x - 2y - 5z = 0.$$

He tomado la 2ª y 3ª ecuación del sistema

Ejercicio 4B

Sea la recta r definida por
$$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$$

a) [1 punto] Determina la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$

b) [1'5 puntos] Halla los puntos de r cuya distancia al origen es de 4 unidades

Solución

(a) El plano π tendrá como vector director el de la recta r que es perpendicular al vector formado por el punto P y el genérico G siendo su producto escalar nulo

$$z = -3x \Rightarrow 2y = -3x \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x \Rightarrow \left(1, -\frac{3}{2}, -3\right) \equiv (2, -3, -6) \equiv (-2, 3, 6) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-2, 3, 6) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{PG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(-2, 3, 6) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-1) + 6 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow -2x + 3y + 6z - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - 3y - 6z + 7 = 0$$

(b)

$d_{O,r} = |4|$, de donde $\sqrt{(-2\lambda-0)^2 + (3\lambda-0)^2 + (6\lambda-0)^2} = |4|$. Operando y elevando al cuadrado tenemos $49\lambda^2 = 16$, luego $\lambda = \pm 4/7$. Resumiendo

$$7\lambda = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4}{7} \Rightarrow R_1 \begin{cases} x = -2 \cdot \frac{4}{7} = -\frac{8}{7} \\ y = 3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{7} \\ z = 6 \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow R_1 \left(-\frac{8}{7}, \frac{12}{7}, \frac{24}{7} \right) \\ \lambda = -\frac{4}{7} \Rightarrow R_1 \begin{cases} x = -2 \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) = \frac{8}{7} \\ y = 3 \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) = -\frac{12}{7} \\ z = 6 \cdot \left(-\frac{4}{7} \right) = -\frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow R_1 \left(\frac{8}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{24}{7} \right) \end{cases}$$